

$$b) \quad 114x + 30y = 54$$

or $114x(-1) + 30x4 = 6$ donc $114x(-9) + 30x36 = 54$
 Donc $(-9, 36)$ est une solution particulière de $114x + 30y = 54$

$$d'où \quad 114(x+9) + 30(y-36) = 0 \Leftrightarrow 114(x+9) = 30(36-y)$$

$$\Leftrightarrow 19(x+9) = 5(36-y)$$

$19 \wedge 5 = 1$ et $5 \mid 19(x+9)$ donc, d'après le théorème de Gauss:

$5 \mid x+9$ et donc il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $x = 5k - 9$

d'où $19 \times 5k = 5(36-y) \Leftrightarrow y = 36 - 19k$

En prenant $m = k+2$ on a: il existe $m \in \mathbb{Z}$ tel que:

$x = 5m + 1$ et $y = 36 - 19m - 38 \Leftrightarrow y = -2 - 19m$

on a $S = \{ (1+5m, -2-19m) \mid m \in \mathbb{Z} \}$

c) $6 \nmid 25$. Si $114x + 30y = 25$ admet des solutions alors:

$\exists (u, v) \in \mathbb{Z}^2, \quad 114u + 30v = 25$

or $6 = \text{PGCD}(114, 30)$ donc $6 \mid 114$ et $6 \mid 30$ donc
 (combinaison linéaire de 114 et 30)

$6 \mid 114u + 30v$

Soit $6 \mid 25$ ce qui est impossible.

Donc $S = \emptyset$